Woche 2

Lemma 1.23: Seien $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ und sei $v \in \mathbb{R}^m$ eine Linearkombination von $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Dann gilt:

$$\underbrace{\mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n)}_{S} = \underbrace{\mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n, v)}_{T}.$$

Beweisidee:

- Jedes Element von S ist in T : $S \subseteq T$
- T ist Teilmenge von S : $T \subseteq S$

$\Rightarrow$ beide Mengen sind gleich!

Beweis:

$S \subseteq T$: Jedes Element von S ist eine Linearkombination von $v_1, v_2, \dots, v_n$, und damit auch von $v_1, v_2, \dots, v_n, v$ (addiere $0v$), d.h. auch Element von T.

$T \subseteq S$: Jedes $w \in T$ ist Linearkombination von $v_1, v_2, \dots, v_n, v$:

$$w = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j + \lambda v.$$

Wissen:

$$v = \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j$$

Zusammen:

$$w = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j + \lambda \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j + \lambda \mu_j)\, v_j \quad \Rightarrow w \in$$

Matrizen und Linearkombinationen (2.1)

Matrix: Notation für eine Folge von Vektoren:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \right) \longrightarrow \underset{\text{3 x 2 Matrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}} \longrightarrow \underbrace{([1,2], [3,4], [5,6])}_{\text{Zeilenvektoren}}$$

Def. 2.1: Eine $m \times n$ Matrix ist ein rechteckiges Feld reeller Zahlen mit m Zeilen und n Spalten.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

oder $a_{i,j}$ $\leftarrow$ a_{ij}: Eintrag in Zeile i und Spalte j

Pünktchenfreie Notation: $A = [a_{ij}]_{i=1,\, j=1}^{m \quad n}$

$\mathbb{R}^{m \times n}$: Menge aller $m \times n$ Matrizen

Spaltennotation: $A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$

$\underbrace{\begin{matrix} m \times 0\text{-Matrix?} \\ 0 \times n\text{-Matrix?} \end{matrix}}_{\text{wird nachgeliefert :-)}}$

Spaltenvektor $v \in \mathbb{R}^m$: $m \times 1$ - Matrix

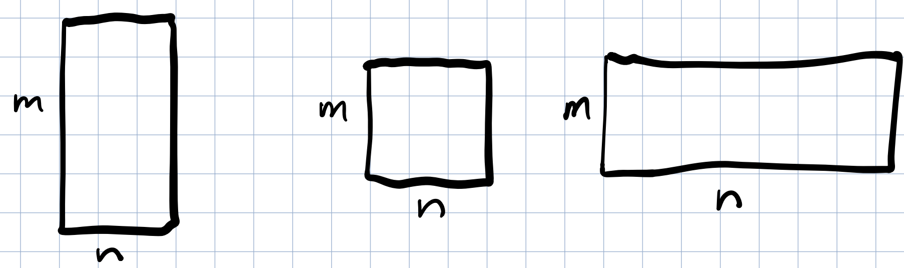
Zeilenvektor $u \in \mathbb{R}^n$: $1 \times n$ - Matrix

Matrixaddition und Skalarmultiplikation (Def. 2.2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{0}$: Nullmatrix (alle Einträge sind 0)



„lang und dünn" $(m > n)$ „quadratisch" $(m = n)$ „kurz und breit" $(m < n)$

Quadratische Matrizen (Def. 2.3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Identitätsmatrix I: $a_{ij} = \delta_{ij}$

Diagonal-Matrix: $j \neq i : a_{ij} = 0$

Obere Dreiecksmatrix: $j < i : a_{ij} = 0$

$\downarrow$

Kronecker-Delta: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Untere Dreiecks-matrix
$j > i : a_{ij} = 0$

symmetrische Matrix
$a_{ij} = a_{ji}$

Diagonalmatrix
4×4

Matrix-Vektor-Multiplikation :

Notation für Linearkombination der Spalten

$$\underbrace{7 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}}_{\text{Linearkombination}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}}_{\text{Matrix-Vektor-Produkt}}$$

Def. 2.4 : Sei

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \; x \in \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$\in \mathbb{R}^m$

Der Vektor

$$Ax := \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \in \mathbb{R}^m$$

ist das Produkt von A und x.

Direkte Definition (ohne Spalten), Beob. 2.5

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & | & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & & v_n \end{array} \end{array}$$

$\parallel$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n$$

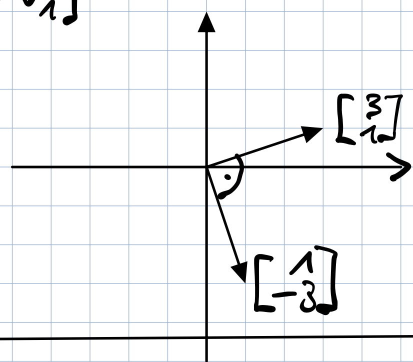
Definition in Zeilennotation (Beobachtung 2.7)

$$A = \begin{bmatrix} — & u_1 & — \\ — & u_2 & — \\ & \vdots & \\ — & u_m & — \end{bmatrix}, \quad Ax = \begin{bmatrix} u_1 \cdot x \\ u_2 \cdot x \\ \vdots \\ u_m \cdot x \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Clicker: $\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}}_{Av} = \begin{bmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{bmatrix}$ (Rotation um 90°)

Av steht senkrecht auf v, $v \cdot (Av) = 0$



Korollar 2.6: $Ix = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$

$\uparrow$ $m \times m$ Identitätsmatrix

Spaltenraum und Rang

Def. 2.8: Sei A eine $m \times n$ Matrix. Der Spaltenraum (oder auch das Bild) von A ist der

Spann der Spalten,

$$C(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

$x = 0 \Rightarrow 0 \in C(A)$.

Fakt 1.5 : $C\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$.

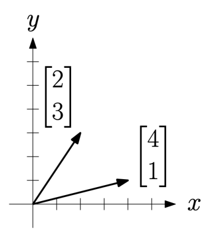
Unabhängige Spalten:

Def. 2.9: Sei

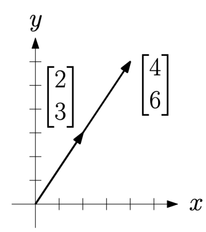
$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Spalte v_j ist unabhängig, falls v_j keine Linearkombination von $v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}$ ist. Andernfalls ist v_j abhängig. Die Anzahl unabhängiger Spalten ist der Rang von A, rank(A).

$$\textbf{rank}\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2$$



$$\textbf{rank}\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\right) = 1$$



Beide Spalten unabhängig

Nur die erste Spalte unabhängig

rank$(A) = n$: Spalten sind linear unabh. (Korollar 1.20 (iii))

rank$(A) = 0$: Nullmatrix

Später: Umsortierung der Spalten ändert den Rang nicht.

Lemma 2.10: Sei A eine $m \times n$ Matrix mit r unabhängigen Spalten. Sei C die $m \times r$ Untermatrix mit den unabh. Spalten. Dann gilt

$$\mathbf{C}(C) = \mathbf{C}(A).$$

„jede Linearkombination der Spalten ist bereits eine Linearkombination der unabh. Spalten).

Beweis folgt!

Beweis: $u_1, u_2, \dots u_r$: die unabhängigen Spalte

$w_1, w_2, \dots w_{n-r}$: die abhängigen Spalten

(in gleicher Reihenfolge wie in A)

Für alle j gilt: w_j ist Linearkombination von

$\underbrace{u_1, u_2, \dots u_r, w_1, w_2, \dots w_{j-1}}$:

diese Folge enthält alle vorherigen abh. Spalten und alle (vorherigen) unabh. Spalten.

Beginne mit $\underbrace{\mathrm{Span}(u_1, u_2, \dots u_r)}_{\mathbf{C}(C)}$

Fuge $w_1, w_2, \dots w_{n-r}$ nacheinander hinzu

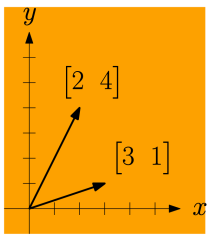
$$\rightarrow \quad \underbrace{\mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_r, w_1, w_2, \dots, w_{n-r})}_{C(A)} \overset{!}{=}$$

In jedem Schritt wird eine Linearkombination der vorherigen Spalten hinzugefügt $\Rightarrow$ Spann ändert sich nie! (Lemma 1.23).

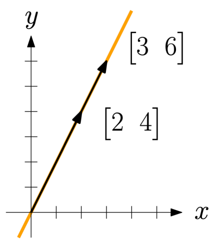
Zeilenraum und Transponierte

Zeilenraum einer Matrix: Spann der <u>Zeilen</u>

$\mathbf{R}\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\right)$

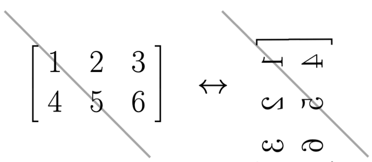


$\mathbf{R}\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\right)$



Später: Rang (Spaltenrang) = Zeilenrang (Anzahl unabh. Zeilen)

Offizielle Definitionen von unabh. Zeilen und Zeilenraum über transponierte Matrizen.



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Transponieren: Spiegeln der Matrix an der Diagonalen

Def. 2.11 Sei $A = [a_{ij}]_{i=1, j=1}^{m \quad n}$ eine $m \times n$ Matrix. Die Transponierte von A ist die $n \times m$ Matrix

$[b_{ij}]_{i=1,j=1}^{n\ \ m} = A^T := [a_{ji}]_{i=1,j=1}^{n\ \ m}$

mit $b_{ij} := a_{ji}$

A^T: Eintrag in Zeile 2, Spalte 3?

a_{32}

Eintrag von A in Zeile 3, Spalte 2

Spaltenvektor $\Longleftrightarrow$ Zeilenvektor:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}^T = [1\ 3\ 5]$$

Beob. 2.12:

$$(A^T)^T = A$$

A symmetrisch (Def. 2.3) $\Leftrightarrow A^T = A$

Def. 2.13: Sei A eine $m \times n$ Matrix. Der Zeilenraum $R(A)$ von A ist der Spaltenraum der Transponierten:

$$R(A) := C(A^T).$$

Matrixmultiplikation (2.2)

Notation für mehrere Linearkombination der Spalten

Def. 2.16 Sei A eine $a \times n$-Matrix und

$$B = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \dots & x_b \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$ eine $n \times b$-Matrix.

Die $a \times b$ Matrix

$$AB := \left.\overbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ Ax_1 & Ax_2 & \dots & Ax_b \\ | & | & & | \end{bmatrix}}^{b}\right\} a$$ ist

das Produkt von A und B.

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$:

λ	μ	$\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}$
-3	2	$\begin{bmatrix} 0 \\ -11 \end{bmatrix}$
1	-1	$\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$
3	0	$\begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 \\ -11 & 4 & 9 \end{bmatrix}}_{AB}$$

2×2 2×3 2×3

a n b a b

Direkte Definition: „Zeilen von A mal Spalten von B"

$$\underbrace{\begin{bmatrix} — & \mathbf{u}_1 & — \\ — & \mathbf{u}_2 & — \\ & \vdots & \\ — & \mathbf{u}_a & — \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_b \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{x}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{x}_b \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{x}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{x}_b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{x}_1 & \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{x}_b \end{bmatrix}}_{AB \text{ (}ab\text{ scalar products)}} = [\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{x}_j]_{i=1,j=1}^{a \quad b}$$

Ax_1 Ax_2 Ax_b

„Spaltentausch"

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

„Zeilentausch"

$AB \neq BA$, Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ, selbst wenn beide Produkte definiert sind.

$(AB)^T = B^T A^T$ (Lemma 2.19)

Korollar 2.20: Sei I die $m \times m$ Identitätsmatrix. Es gilt $IA = A$ für alle $m \times n$ Matrizen und

$AI = A$ für alle $n \times m$ Matrizen.

Alles ist Matrixmultiplikation!

Matrix-Vektor-Multiplikation:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{2\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}}_{2\times 1}$$

Vektor-Matrix-Multiplikation:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{1\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_{2\times 2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix}}_{1\times 2}$$

Skalarprodukt

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}_{1\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}}_{2\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}}_{1\times 1} \text{"="} \ 11$$

Andere Skalarproduktnotation: $v \cdot w = v^T w$

Äusseres Produkt: $(m \times 1) \cdot (1 \times n) \rightarrow m \times n$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}}_{2\times 1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}_{1\times 2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}}_{2\times 2} \leftarrow \text{Rang } 1$$

Lemma 2.21: Sei A eine $m \times n$ Matrix. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $\operatorname{rank}(A) = 1$

(ii) Es gibt Vektoren $v \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, $w \neq 0$ so dass $\underbrace{A}_{m \times n} = \underbrace{v}_{m \times 1} \underbrace{w^T}_{1 \times n}$.

Distributivität und Assoziativität

Lemma 2.22: Seien A, B, C drei Matrizen. Wann immer Summen und Produkte definiert sind, gilt:

(i) $A(B+C) = AB + AC$; $(A+B)C = AC + BC$

(ii) $(AB)C = A(BC)$

Assoziativität

Distributivität

Verallgemeinerte Assoziativität: Klammern spielen keine Rolle, auch bei mehr Matrizen (braucht einen separaten Beweis). Zum Beispiel:

$$(AB)(CD) = A((BC)D) = \ldots = ABCD.$$

Clicker:
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}_{v^T} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{w} \right)$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \end{bmatrix} \text{ "="} \; 12$$